



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
GRADO EN MATEMÁTICAS
Análisis Numérico

Nombre:

Examen Final (13/06/2017)

1.1 Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 242 & 324 \\ -183 & -245 \end{pmatrix} x(t), t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases} \quad (1)$$

con $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ y $t_0 < T$. Demostrar que, a pesar de que los coeficientes de la matriz anterior son “grandes”, al aplicar el método de Euler (explícito) al problema (1) con paso $h \in (0, 1)$, siempre se verifica que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0,$$

independientemente del dato inicial ξ_0 .

1.2 Se considera el método multipaso

$$x_{i+2} + \lambda x_{i+1} - (1 + \lambda)x_i = h \left(\mu f(t_{i+1}, x_{i+1}) - \frac{1}{2} f(t_i, x_i) \right), \quad (2)$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Determinar el conjunto de parámetros reales λ y μ para los cuales el método (2):

- a) es estable. b) es consistente. c) tiene orden máximo. d) es convergente.

1.3 Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ x(T) + 2x'(T) = \beta, \end{cases} \quad (3)$$

donde $p, q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- a) Explicar en qué consiste el *Método de tiro* lineal aplicado al problema (3).
b) Enunciar y demostrar la Alternativa de Fredholm para el problema (3).



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
GRADO EN MATEMÁTICAS
Análisis Numérico

Nombre:

Examen Final (27/06/2017)

1.1 Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t), & t \geq 0 \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

- a) Si $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es la sucesión que se obtiene cuando se aplica el método de Euler explícito con un paso de discretización $h > 0$ (que se supone fijo) y con $x_0 = 1$, calcular el valor x_i con $i \in \mathbb{N}$ arbitrario.
- b) ¿Cuáles son los valores x_1, x_2 y x_3 cuando $h = \frac{3}{2}$?
- c) Si x es la solución exacta del problema (1), ¿qué debe cumplir h para que $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?
- d) ¿Qué debe cumplir h para que, además de la condición dada en el apartado c), se cumpla que $x_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$?

En todos los apartados anteriores se debe justificar la respuesta.

1.2 Hallar la región de estabilidad absoluta del método

$$x_{i+1} = x_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right).$$

¿Es A-estable?

1.3 Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + q(t)x(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ \mu x(t_0) - x'(t_0) = \alpha \\ x(T) = \beta \end{cases} \quad (2)$$

donde $q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$, $q(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, T]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mu \geq 0$. Deducir un método de Diferencias Finitas para el problema de contorno (2) que sea de orden 2 y mostrar que el sistema lineal que se obtiene tiene una única solución.



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
GRADO EN MATEMÁTICAS
Análisis Numérico

Nombre:

Examen Final (01/09/2017)

1.1 Se considera un (ϱ, σ) -Método multipaso lineal con $\sigma(z) = z^3$. Encontrar, deduciendo de forma razonada, un polinomio $\varrho(z)$ de grado 3 para que el (ϱ, σ) -Método anterior tenga orden máximo. ¿Cuál es este orden máximo? ¿Es convergente el método obtenido?

1.2 Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde $f \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$. Dado $N \in \mathbb{N}$, se considera la red de puntos de paso $h = \frac{T-t_0}{N}$ formada por los nodos $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0, 1, \dots, N$.

Para resolver numéricamente el problema (1) se considera el método de predicción-corrección $P(EC)E$ en el que se toma como predictor el *método de Heun* (orden 2)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{4} \left(f(t_i, x_i) + 3f \left(t_i + \frac{2h}{3}, x_i + \frac{2h}{3} f(t_i, x_i) \right) \right)$$

y como corrector el *método de Simpson* (orden 4)

$$x_{i+2} = x_i + \frac{h}{3} (f(t_{i+2}, x_{i+2}) + 4f(t_{i+1}, x_{i+1}) + f(t_i, x_i)).$$

Obtener, justificando la respuesta, el orden del método de predicción-corrección resultante.

1.3 Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), & t \in [2, 5] \\ x'(2) = 6 \\ x(5) + x'(5) = 4 \end{cases} \quad (2)$$

donde $p, q, r \in C([2, 5])$.

a) Explicar en qué consiste el *Método de tiro* lineal aplicado al problema (2).

b) Enunciar y demostrar la Alternativa de Fredholm para el problema (2).

1.4 Supongamos que tenemos los siguientes ficheros de Matlab:

1) `datos.m`, que contiene el siguiente texto:

```
f=@funcion; intervalo=[0 2*pi]; x0=[0 4]; N=1000;
```

2) `funcion.m`, que contiene el siguiente texto:

```
function f=funcion(t,x)
f1=x(2);
f2=-9*x(1)+8*sin(t);
f=[f1;f2];
```

3) `testexam.m`, que contiene el siguiente texto:

```
datos
[t,x]=metexam(f, intervalo, x0, N);
graf
```

donde se supone que `metexam.m` implementa un método de resolución de problemas de valor inicial y `graf.m` representa gráficamente la solución.

- a) Si `funcion.m` define la función f que gobierna un problema de valor inicial del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases}$$

escribir el problema de valor inicial definido por los ficheros `datos.m` y `funcion.m`.

- b) Escribir el contenido del fichero `metexam.m` de forma que implemente el método monopaso

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{4} \left(f(t_i, x_i) + 3f \left(t_i + \frac{2h}{3}, x_i + \frac{2h}{3} f(t_i, x_i) \right) \right)$$

para la resolución aproximada de problemas de valor inicial.

- c) Escribir el contenido del fichero `graf.m` para que dibuje la trayectoria de la solución aproximada que se obtiene al resolver el problema de valor inicial correspondiente a `datos.m` con el método `metexam.m`.



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
GRADO EN MATEMÁTICAS
Análisis Numérico

Nombre:

Examen Final (30/05/2018)

1.1 Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x(t), \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1)$$

Dado $N \in \mathbb{N}$ se considera el paso $h = \frac{1}{4N}$ y la red de puntos $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

- a) Calcular la solución exacta x del problema de valor inicial (1).
- b) Partiendo de $x_0 = x(0)$, obtener la primera aproximación $x_1 \simeq x(t_1)$ que se obtiene al aplicar el método del Trapecio al problema (1).
- c) Demostrar que $\|x_1 - x(t_1)\|_\infty = O(h^3)$.

1.2 Se considera el método monopaso

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{4} \left[f(t_i, x_i) + 3f\left(t_i + \frac{2h}{3}, x_i + \frac{2h}{3}f\left(t_i + \frac{h}{3}, x_i + \frac{h}{3}f(t_i, x_i)\right)\right) \right]. \quad (2)$$

- a) Escribir el tablero de Butcher del método (2).
- b) Hallar la función de estabilidad (o amplificación) del método (2).
- c) Probar que el método (2) tiene, al menos, orden 3.

1.3 Supongamos que el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

tiene una única solución $x \in C^4([0, 1])$ y que existe, además, una única solución de la aproximación numérica

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ -\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} + f(t_i, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ x_{N+1} = 0, \end{cases}$$

donde $t_i = ih$ y $h = \frac{1}{N+1}$ para cierto entero $N \geq 2$.

- a) Definir el error local de truncamiento $\tau(t, h)$ asociado a la aproximación anterior y probar que se verifica que

$$\tau(t, h) = -\frac{h^2}{12}x^{(4)}(\vartheta),$$

con $\vartheta \in (t - h, t + h)$.

- b) Demostrar que, si f es suficientemente regular, para $i = 0, 1, \dots, N + 1$ el error global $\varepsilon_i(h) = x(t_i) - x_i$ verifica

$$\begin{cases} \varepsilon_0(h) = 0 \\ -\frac{\varepsilon_{i-1}(h) - 2\varepsilon_i(h) + \varepsilon_{i+1}(h)}{h^2} + p_i\varepsilon_i(h) = \tau(t_i, h), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \varepsilon_{N+1}(h) = 0, \end{cases}$$

para cierto p_i . ¿Cuál es el valor de p_i ?

1.4 Se considera el problema de valor inicial escalar

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \cos(t), & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Crear un fichero de tipo script de Matlab que, al ejecutarlo, haga lo siguiente:

1) Aplique el método

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{3}(f(t_i, x_i) + 2f(t_{i+1}, x_{i+1}))$$

para obtener una solución aproximada del problema (3) cuando se divide el intervalo $[0, \pi]$ en 100 subintervalos equiespaciados.

2) Represente gráficamente la solución numérica obtenida.

Importante: El programa se debe hacer de tal manera que esté en un **ÚNICO FICHERO** sin utilizar funciones o scripts externos (salvo los comandos y funciones propias de Matlab).



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
GRADO EN MATEMÁTICAS
Análisis Numérico

Nombre:

Examen Final (02/07/2018)

1.1 a) Hallar la función de estabilidad (o amplificación) del θ -Método

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ x_{i+1} = x_i + h((1-\theta)f(t_i, x_i) + \theta f(t_{i+1}, x_{i+1})). \end{cases}$$

b) Demostrar que el θ -Método es A -estable para valores $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

1.2 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, se considera el método multipaso lineal

$$x_{i+3} + ax_{i+1} + bx_i = chf(t_{i+2}, x_{i+2}). \quad (1)$$

a) Determinar los valores de a, b y c para los cuales el método (1) tiene orden máximo, determinando cuál es dicho orden máximo.

b) Para los valores de a, b y c obtenidos en el apartado a):

I) ¿Es convergente el método (1)?

II) Hallar la región de estabilidad absoluta del método (1).

III) ¿Es A -estable el método (1)?

1.3 Dadas $p, q, r \in C([2, 5])$ se consideran los problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = r(t), & t \in [2, 5] \\ y_1(2) = 0 \\ y_1'(2) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0, & t \in [2, 5] \\ y_2(2) = 1 \\ y_2'(2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

a) Si y_1 e y_2 son, respectivamente, soluciones de los problemas de valor inicial dados en (2), de forma que $y_2'(5) \neq 0$, si se considera

$$s = \frac{3 - y_1'(5)}{y_2'(5)},$$

encontrar, razonando la forma en que se hace, un problema de contorno del cual sea solución la función

$$y(t) = y_1(t) + sy_2(t), \quad t \in [2, 5].$$

b) En el caso de que $y_2'(5) = 0$, determinar cuántas soluciones puede tener el problema de contorno del apartado a) y cómo pueden determinarse sus soluciones en términos de las funciones y_1 e y_2 .

1.4 Se considera el problema de valor inicial escalar

$$\begin{cases} x'(t) = -2(x(t) - 3), & t \in [0, 1] \\ x(0) = 2, \end{cases} \quad (3)$$

cuya solución exacta es

$$x(t) = 3 - e^{-2t}, \quad t \in [0, 1].$$

Crear un fichero de tipo script de Matlab que, al ejecutarlo, haga lo siguiente:

1) Aplique el método de predicción–corrección $P(EC)E$ cuando se toma como predictor el método de Euler (explícito) y como corrector el método de Adams–Moulton de dos pasos

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{12}(5f(t_{i+2}, x_{i+2}) + 8f(t_{i+1}, x_{i+1}) - f(t_i, x_i)),$$

(inicializándolo con el método de Euler explícito), para obtener una solución aproximada del problema (3) cuando se divide el intervalo $[0, 1]$ en 200 subintervalos equiespaciados. No es necesario que el programa haga sólo una evaluación de f en cada iteración.

- 2) Dibuje, en una misma gráfica, la solución numérica obtenida en el apartado 1) junto con la solución exacta.
- 3) Calcule el valor del máximo error cometido.

Importante: El programa se debe hacer de tal manera que esté en un **ÚNICO FICHERO** sin utilizar funciones o scripts externos (salvo los comandos y funciones propias de Matlab).